Rapport Projet RO

Problème d'affectation linéaire

Dardor Rochdi
M.Tseveendorj Ider
14 avril 2023

Introduction et modélisation de problème :

Le problème d'affectation linéaire consiste à établir des liens entre les éléments de deux ensembles distincts (par exemple, des agents et des tâches), de façon à minimiser un coût et en respectant des contraintes d'unicité de lien pour chaque élément. Ce problème est couramment utilisé dans diverses applications pratiques telles que l'affectation des tâches aux travailleurs, la planification de la production, et la gestion des ressources humaines.

Modélisation :

Ce problème consiste à assigner n agents à n tâches, avec un coût c_{ij} associé à l'affectation de l'agent i à la tâche j. Le but est de minimiser le coût total de l'affectation. On peut représenter ce problème sous forme de matrice carrée n x n des coûts c_{ij} associés à chaque combinaison agent-tâche, où i et j correspondent aux indices de l'agent et de la tâche respectivement.

Le modèle mathématique peut alors être formulé comme suit :

On note z le cout total

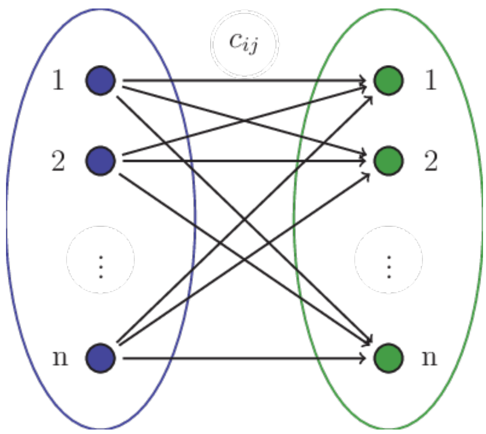
$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ pour } i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ pour } j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in 0,1 \text{ pour } i = 1,\ldots,n \text{ et } j = 1,\ldots,n$$



Problème d'affectation sous forme d'un graphe biparti

Ici, x_{ij} représente la variable binaire qui indique si l'agent i est assigné à la tâche j $x_{ij} = 1$ ou non $x_{ij} = 0$.

Les deux premières contraintes garantissent que chaque agent est assigné à exactement une tâche et que chaque tâche est assignée à exactement un agent. La troisième contrainte indique que les variables x_{ij} ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

Résolution du problème :

<u>Méthode heuristique :</u>

Les méthodes heuristiques sont des approches qui permettent de résoudre un problème en construisant des solutions approchées. Ces méthodes ne garantissent pas l'optimalité, mais permettent d'obtenir rapidement une solution qui est souvent proche de l'optimum. Une méthode heuristique possible pour résoudre le problème d'affectation linéaire est l'algorithme glouton. Cet algorithme permet de construire une solution en sélectionnant successivement les affectations qui minimisent le coût. Cette approche est rapide, mais peut conduire à des solutions sous-optimales.

<u>Méthode exacte :</u>

Les méthodes exactes, quant à elles, permettent de garantir la recherche de la solution optimale. Une méthode exacte pour le problème d'affectation linéaire est l'algorithme de la méthode hongroise. Cette méthode est capable de résoudre le problème en temps polynomial, ce qui signifie qu'elle est capable de traiter des problèmes de grande taille. L'algorithme de la méthode hongroise consiste à chercher à assigner chaque travailleur à une tâche, tout en minimisant le coût total d'affectation. Cette méthode est donc très précise, mais peut prendre plus de temps pour trouver la solution optimale, surtout pour des problèmes de grande taille.

Application à un problème :

Considérons un problème d'affectation où trois personnes doivent être assignées à trois travaux différents. Pour chaque combinaison personne-travail, un coût de formation est donné. Le tableau ci-dessous montre les coûts de formation associés à chaque combinaison :

	Agent 1	Agent 2	Agent 3
tâche 1	2	4	2
tâche 2	3	4	3
tâche 3	4	3	5

Considérons une matrice de coûts de formation de taille 3x3, où chaque cellule représente le coût de la formation d'une personne pour un travail donné.
L'objectif de ce problème est de minimiser le coût total de formation de tout le personnel tout en affectant chaque personne à un travail unique.

Résolution :

Algorithme glouton :

Nous cherchons à affecter les personnes aux travaux de manière à minimiser le coût total de la formation de l'ensemble du personnel.

Nous allons d'abord appliquer l'algorithme glouton en affectant au fur et à mesure les personnes et le travail correspondant. Ainsi, on peut affecter le travail 1 à la personne 1, le travail 2 à la personne 2 et le travail 3 à la personne 3. Le coût total de la formation de l'ensemble du personnel pour réaliser les différents travaux est donc de z=2+4+5=12.

Algorithme hongrois :

Cependant, cette méthode ne nous garantit pas une solution optimale. Nous allons donc utiliser l'algorithme hongrois pour obtenir la solution optimale. Pour cela, nous allons suivre les étapes de l'algorithme :

- On soustrait la plus petite valeur de chaque ligne à toute sa ligne pour obtenir une matrice réduite.
- On recherche une affectation optimale en cherchant les zéros de la matrice réduite de façon à en trouver autant que possible, tout en ne prenant pas plus d'un zéro par ligne ou par colonne.
- Si on n'a pas trouvé assez de zéros, on cherche les valeurs minimales non couvertes et on les soustrait des valeurs non couvertes.

En appliquant ces étapes, on obtient la matrice réduite suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le coût de formation minimale est donc de z=2+3+3=8.

En conclusion, nous avons étudié deux algorithmes pour résoudre le problème d'affectation des personnes aux travaux avec pour objectif de minimiser le coût total de formation. Nous avons tout d'abord utilisé l'algorithme glouton qui a permis d'affecter rapidement les personnes aux travaux correspondants mais ne garantit pas une solution optimale. Pour obtenir une solution optimale, nous avons appliqué l'algorithme hongrois en suivant les différentes étapes. Grâce à cet algorithme, nous avons obtenu la solution optimale avec un coût total de formation de z=8. Ainsi, l'utilisation de l'algorithme hongrois s'avère plus efficace pour résoudre ce type de problème d'affectation.

Conclusion :

Ce projet avait pour objectif de trouver une solution optimale pour l'affectation de travailleurs à des tâches de formation en minimisant le coût total de la formation de l'ensemble du personnel. Nous avons utilisé deux algorithmes différents : l'algorithme glouton et l'algorithme hongrois.

L'algorithme glouton nous a permis d'obtenir rapidement une solution, mais elle n'était pas optimale. L'algorithme hongrois, quant à lui, nous a permis d'obtenir une solution optimale en suivant des étapes spécifiques.

Grâce à l'application de l'algorithme hongrois, nous avons pu réduire considérablement le coût total de la formation de l'ensemble du personnel.
Ce projet démontre ainsi l'importance des algorithmes d'optimisation pour résoudre des problèmes complexes. Les algorithmes tels que l'algorithme hongrois peuvent aider les entreprises à économiser du temps et de l'argent en trouvant des solutions optimales à leurs problèmes.